

## Sobre una definición de los fluidos reales

Por WALTER S. HILL

PROFESOR DE FÍSICA MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD DE MONTEVIDEO.—JEFE DE LA SECCIÓN FÍSICO-MATEMÁTICA DEL INSTITUTO DE ESTUDIOS SUPERIORES

1.º — Los fenómenos superficiales en líquidos y sólidos han vuelto a llamar poderosamente la atención de los investigadores, en estos últimos tiempos.

El problema puramente físico, que está en la base de la teoría capilar, agotado aparentemente después de los trabajos clásicos de Laplace, Gauss, Plateau y sus continuadores, revela de improviso su insuficiencia, al punto que se hacen urgentes una revisión y una ampliación de los conceptos primarios en forma de ponerlos a tono con los recientes avances de la *técnica de superficies*.

El presente trabajo aspira a considerarse como un aporte en ese sentido.

2.º — La técnica de la superficie ha surgido como una consecuencia natural de las investigaciones químico-físicas, termodinámicas y biológicas en el orden superficial.

En estos tres terrenos se ha comprobado el rol fundamental que juega la superficie de los cuerpos que evolucionan en los diversos procesos, sean estos químicos, térmicos o biológicos y sean aquellos materia inerte o células vivas.

Este rol de la superficie de contacto, si bien establecido desde hace mucho tiempo en casos particulares, fué ignorado hasta ahora como hecho general, con la jerarquía e independencia que lo caracteriza actualmente.

Muchos son los investigadores y muchos son los campos en que se han multiplicado las experiencias sobre técnica superficial. Para constatar su variedad bastará citar algunos de los problemas estudiados en Física, Química, Químico-Física, Biología y Tecnología Industrial.

*Física.* — Problema de la lámina o film superficial, estado superficial de la materia (Marcelin, Devaux, Lecomte du Nouy, etc.). El estado superficial de la materia cons-

tituye de por sí, un importante capítulo de la ciencia, y su cuadro abarca ya un dominio inmenso, siendo difícil predecir el desarrollo que tendrá próximamente.

El problema de las dimensiones moleculares, utilizando el proceder de las tensiones capilares críticas (Lecomte du Nouy, etc.).

Dualidad experimental entre la presión hidrostática en el seno de un fluido y la tensión superficial: fluidos de dos dimensiones.

En realidad, la mayoría de las conclusiones en el dominio superficial pueden provenir de una generalización sistemática de conclusiones similares (duales) en el dominio del volumen.

*Química.* — Intervención de las superficies en las reacciones químicas, catálisis, etc. (Dubrisay, por ejemplo, *Les actions des surfaces dans les phénomènes chimiques*, Boletín de la Sociedad Química de Francia).

*Química-Física.* — Termodinámica superficial (R. Defay, *Etude Thermodynamique de la Tension Superficielle*), concentraciones y disoluciones y superficiales, presión osmótica, etc. (Gibbs, Marcelin, etc., *Equilibre de Membrane*, Marinesco, etc.).

*Biología y Bio-física.* — La membrana de la célula viva como elemento superficial, por ejemplo, Devaux, *La Structure de la Cellule et les tissus vivants*.

La explicación del efecto tóxico en el organismo por la dispersión superficial de ciertas toxinas en las paredes capilares (Hemolisis producida por el veneno de la cobra, etc.). Importancia de las tensiones capilares en el serum (Lecomte du Nouy, etc.).

La tensión superficial de la membrana y su intervención en los problemas del crecimiento y la reproducción de la célula.

El planteamiento de estos problemas podría ser como sigue (en su aspecto físico):

La vida de la célula exige una alimentación proporcional a su volumen (o sea, a la tercera potencia de sus dimensiones). Por otra parte, la absorción de alimentos se realiza por la superficie o membrana de la célula y está condicionada por el área activa (o sea, proporcional a los cuadrados de las dimensiones). A partir de cierto instante, el crecimiento de la célula no podría proseguir con la tasa de alimentación requerida por el volumen celular, pues-



to que el volumen ha crecido en una proporción superior al área de la membrana según las exigencias geométricas del fenómeno. Entonces sobreviene la muerte de la célula o la reproducción por división, ésto es, la incrementación natural de la superficie activa por desdoblamiento de volumen.

En todo este proceso, la tensión superficial juega un rol fundamental: el crecimiento es función de la absorción alimenticia superficial y del mismo modo, la reproducción, considerada como incrementación crítica de un área, es un fenómeno típico de superficie, con modificación de potencial capilar.

Sea como ejemplo, una célula esférica de radio  $X$  variable con el crecimiento. Su peso será proporcional al cubo de  $X$ . Admitiendo que el peso de alimento absorbido sea proporcional al peso, se podrá poner:

$$\text{Alimento absorbido en grs/seg} = A = K, x^2.$$

Por otra parte, la absorción máxima posible a través de la membrana será proporcional al área de la esfera:

$$\text{Absorción máxima} = \text{máx } A = K_2 x^2.$$

Igualando  $A$  y  $\text{máx } A$ , se obtiene

$$x = \frac{K_2}{K}$$

donde  $x$  será el mayor radio posible dentro del proceso de crecimiento de la célula. A partir de ahí, caben las siguientes posibilidades biológicas, todas ellas condicionadas por la tensión capilar: muerte, división o incrementación de la tasa de alimentación de la célula.

Esta versión del mecanismo celular no pretende ser exacta ni completa. Sólo busca mostrar la actuación predominante de la superficie.

*Tecnología Industrial.* — Problema de la lubricación y lubricantes (Devaux, Epaisseur minimum d'un Enduit Lubrifiant, 1924; Hardy, Theory of Lubrification, 1922).

Generación de superficie: problema de la ruptura de sólidos por tracción, flexión o compresión: energía de ruptura y tensión capilar.

Barnices y pinturas. — Problema de la adherencia: colas (Marcelin, Solutions Superficielles).

Aisladores eléctricos y superficie aislante.

Corrosión. — Electrocapilaridad, etc.

Esta rápida e incompleta revista muestra la diversidad y la extensión de los problemas vinculados al dominio superficial. Su fenomenología es hoy de interés casi tan grande como la de la masa. Se han podido generalizar a ella muchos problemas de orden volumétrico, cuyas soluciones son formalmente idénticas, bastando traducir *área por volumen* para establecer las leyes similares en la superficie. La experiencia demuestra que en multitud de fenómenos, existe una dualidad notable entre los hechos volumétricos y los de superficie. Esta dualidad prolonga en forma sugestiva, a la materia, la dualidad que siempre se reconoció en el orden abstracto, entre la geometría de la superficie y la del volumen.

Es válido el siguiente cuadro de dualidades:

Volúmen	Superficie
Presión, dinas/cm <sup>2</sup>	Tensión, dinas/cm
Solución común	Solución superficial
Presión osmótica	Tensión osmótica
Potencial interno, ergs/cm <sup>3</sup>	Potencial superficial, ergs
Función de estado interno etc.	Función de estado superficial etc.

En particular, se observa que al concepto físico *presión* corresponde otro concepto físico: *tensión superficial*.

Ambos conceptos son fundamentales en cualquier teoría que pretenda abarcar los fenómenos de volumen o de superficie, en los flúidos.

Sobre todo, desde el punto de vista físico, interesaría saber si la mecánica está capacitada para definir la presión hidrostática y la tensión capilar siguiendo criterios *formalmente duales*, es decir, si existe una mecánica superficial que sea traducción de la mecánica del volumen.

Este es precisamente el tema que me propongo estudiar a continuación.

Demostraré que la mecánica de los medios continuos permite definir presión hidrostática y tensión superficial a partir de dos postulados similares (duals): uno que se refiere al volumen y otro a la superficie.



En esta forma, será posible establecer una definición general de los flúidos, basada en un mínimo de postulados. Esta definición deberá comprender en su cuadro tanto los fenómenos hidrostáticos internos como los superficiales (Capilaridad, etc.).

### 3. — Definición general de un flúido.

Llamaré flúido, por definición, todo sistema material continuo capaz de una movilidad perfecta (es decir, a trabajo nulo), para todas las deformaciones infinitamente pequeñas que se efectúan *sin variación de volúmen elemental ni de las áreas que limitan las diversas porciones del sistema.* (1).

Esta definición comprende tanto los flúidos compresibles como los incompresibles, — los extensibles como los inextensibles. Caben, pues, en su cuadro, tanto los gases como los flúidos reales. La definición dice simplemente, que si entre la infinidad de deformaciones que admite el sistema, aquellas que se efectúan a volúmen y superficies constantes, *son a trabajo nulo*, el sistema ES UN FLUIDO.

Si se tratara de un sistema material que corresponda a lo que entendemos por gas, para saber si es un flúido o no, de acuerdo con nuestra definición, bastará comprobar directa o indirectamente, si las deformaciones que dejan invariantes el volúmen y el área, *son a trabajo nulo*. No importará en absoluto, que hayan deformaciones que modifiquen el volúmen o el área: interesa solamente saber si las que no lo modifican son a trabajo nulo.

Las deformaciones a que me refiero en todo este trabajo, son virtuales (a velocidad nula): por lo tanto no es necesario introducir la viscosidad en las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

A continuación mostraré que la definición de flúido propuesta es compatible con las condiciones clásicas de equilibrio: condiciones hidrostáticas y capilares.

### 4. — DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO a partir de la definición propuesta para los flúidos. (1).

Sea un sistema continuo, ocupando un volúmen  $V$  definido por un conjunto de superficies de áreas  $S_1, S_2, \dots, S_n$  caracterizadas a los efectos de clasificación, por sus condiciones físicas. Supondremos por hipótesis que la movilidad perfecta (a trabajo nulo) de este sistema es compatible con dos ligazones o vínculos de iso-volúmen elemental y de iso-área respectivamente (definición de flúido). Estos vínculos se expresan matemáticamente:

$$\delta dV = 0 \text{ para todo } dV \quad (1)$$

$$\delta S = 0 \text{ } i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

siendo  $n$  el número de superficies distintas físicamente (inter-fases).

La (1) constituye un sistema de infinitas ecuaciones de condición o ligazones, y la (2) un sistema de  $n$  ecuaciones de ligazón. Debe entenderse además que el símbolo  $S$  se refiere al área de todas las superficies en idénticas condiciones físicas englobadas, aún en el caso de no ser contiguas.

Sean  $F(XYZ)$  y  $F_s(XYZ)$  las fuerzas aplicadas al sistema, por unidad de masa y por unidad de área, respectivamente.  $F$  representa el vector fuerza y  $X Y Z$  sus proyecciones sobre una terna rectangular de ejes coordenados.

La expresión del trabajo virtual correspondiente a las deformaciones virtuales aplicadas a toda la masa y a toda el área del sistema (superficie libre), es en notación vectorial:

$$\delta T = \int v (rF \times \delta e) dV + \sum \int_s (F_s \times \delta e_i) dS \quad (3)$$

Siendo  $F$  y  $F_s$  las únicas fuerzas aplicadas y siendo perfectos los dos vínculos considerados, la (3) deberá ser nula para todas las deformaciones del sistema compatibles con esos vínculos.

$r$  es la densidad,  $\delta e$  el vector deformación,  $dV$  la diferencial de volumen,  $\delta T$  el trabajo elemental virtual y  $dS$  la diferencial de área. Las deformaciones consideradas, además de virtuales son infinitésimas.

Para introducir los vínculos en la expresión del trabajo elemental, utilizaré el método de los multiplicadores de Lagrange (1).

Sean  $\gamma$  y  $\lambda$  estos multiplicadores, correspondientes a los vínculos de superficie y volumen, respectivamente.

Multiplicando las expresiones vinculares (1) y (2) por

(1) La transformación (5) constituye la forma intrínseca de la variación de área debida a la deformación del contorno, obtenida casi simultáneamente por H. De Donder y el autor del presente trabajo, I y II.

$\lambda$  y  $\gamma$  respectivamente y transformando para poner en evidencia la parte lineal en  $\delta \bar{e}$ , se obtiene:

$$\lambda \delta dV = \text{div } \lambda \delta \bar{e} dV - (\delta \bar{e} \times \text{grad } \lambda) dV = 0 \quad (4)$$

$$\lambda \delta S = \delta \left[ \int_S \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \bar{N} \times \delta \bar{e} dS + \int_c d\bar{e} \wedge \bar{N} \times \delta \bar{e} \right] = 0 \quad (5)$$

La fórmula (4) expresa la variación de volumen en función de  $\delta \bar{e}$  y la fórmula (5) expresa la variación de área producida en la superficie S cuando se aplica en cada punto de ella, incluyendo el contorno, la deformación elemental  $\delta \bar{e}$ .<sup>(1)</sup>

En esta fórmula  $R_1$  y  $R_2$  son los radios de curvatura principales en un punto de la superficie S y  $\bar{N}$  es el vector normal exterior. La primera integral extendida al área y la segunda al contorno c.

Introduciendo las expresiones (4) y (5) en la ecuación del equilibrio (3) y sacando como factores comunes a los  $\delta \bar{e}$ , se obtiene finalmente:

$$\int_V (r \bar{F} - \text{grad } \lambda) \times \delta \bar{e} dV + \sum \int_S \bar{F} + \bar{N} [\lambda + \delta \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \times \delta \bar{e} dS + + \sum \int_c d\bar{e} \wedge (\sum \bar{N}) \times \delta \bar{e} = 0 \quad (6)$$

La (6) deberá ser nula para todas las deformaciones, compatibles o nó con los vínculos.

Se obtienen inmediatamente las condiciones clásicas del equilibrio de los flúidos, que se traducen en las siguientes ecuaciones puntuales:

$$r \bar{F} - \text{grad } \lambda = 0 \quad (7)$$

$$\bar{F} + \bar{N} [\lambda + \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)] = 0 \quad (8)$$

$$d\bar{e} \wedge (\bar{N}_1 \delta_1 + \dots + \bar{N}_k \delta_k) = 0 \quad (9)$$

La (7) es la condición de equilibrio interno o ley fundamental de la Hidrostática: el multiplicador  $\lambda$  es la presión hidrostática (1).

La (8) es la condición de equilibrio superficial o Ley



de Laplace: el multiplicador  $\delta$  es la *tensión superficial* (1).

La (9) es la condición de equilibrio de contorno para el caso de  $k$  superficies concurrentes en el contorno: caso de la gota de aceite flotando en el agua, por ejemplo.

Introduciendo un nuevo vínculo de rigidez, podrían considerarse también los casos del *recipiente sólido* y del *cuerpo flotante* (1).

En definitiva se observa que, utilizando como punto de partida dos vínculos formalmente similares (ambos expresan que las deformaciones a trabajo nulo comprenden a las que dejan invariantes los volúmenes y las áreas), hemos llegado a las clásicas ecuaciones del equilibrio de los flúidos, en su aspecto más general.

Cabe consignar finalmente, una conclusión de interés para la física y la química-física: las condiciones halladas son *necesarias pero no suficientes*. La determinación completa de los multiplicadores  $\lambda$  y  $\delta$ , es decir, de la presión hidrostática y de la tensión superficial, sólo podría hacerse cuando se conozcan las *funciones de estado*, respectivas, que ligan las variables  $\lambda$  y  $\delta$  a los parámetros termodinámicos. Se entra entonces, naturalmente en el dominio de la Termodinámica.