Ejemplos de Aplicación del Cálculo de Máximos y Mínimos a Problemas del Campo de la Física

JUAN LICHTENSTEIN

I — MECANICA.

PROBLEMA:

¿De qué altura hay que dejar caer una bola perfectamente elástica para que el tiempo total, empleado en caer hasta el suelo y volver a alcanzar determinada altura de h metros, sea mínimo?

SOLUCION:

En primer lugar, se debe expresar el tiempo total t, empleado por la bola en caer y luego volver a la altura h, en función de la distancia x, de la cual se deja caer y que nos proponemos determinar.

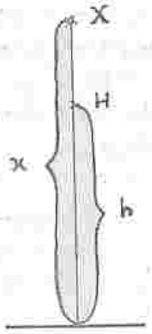

Fig. 1.

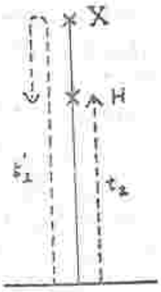

Fig 2

t se compone de dos partes. En la primera (t_1) la bola cae desde x metros hasta el suelo y en la segunda (t_2) sube hasta h metros. De modo que:

$$t = t_1 + t_2 \qquad (1)$$

Para expresar t_1 en función de x, se aplica la fórmula de la caída libre:

$$x = g/2\; t_1^2$$

De donde:

$$t_1 = \sqrt{2x/g}$$

Para t_2 se tiene la fórmula del espacio en el lanzamiento vertical:

$$h = v_o t_2 - g/2\; t_2^2 \qquad (2)$$

donde v_o representa la velocidad inicial que, tratándose de un cuerpo perfectamente elástico, es igual en valor absoluto a la velocidad final (v_f) con la cual llega al suelo.

$$|v_o| = |v_f| = \sqrt{2xg}$$

Sustituyendo en (2), se llega a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$g t_2^2 - 2\sqrt{2xg}\, t_2 + 2h = 0$$

Resolviéndola con respecto a t_2, se tiene:

$$t_2 = \sqrt{2x/g} \pm \sqrt{2(x-h)/g}$$

O sea, se obtienen dos valores para t_2, (fig. 2) lo que indica que la bola pasa dos veces por el punto h, la primera vez al subir y luego, después de haber alcanzado x, al bajar. En este caso interesa sólo el primer valor de t_2 que deberá ser evidentemente el menor. Por lo tanto se tomará

$$t_2 = \sqrt{2x/g} - \sqrt{2(x-h)/g}$$

Sustituyendo los valores de t_1 y t_2 en (1) se llega a la expresión:

$$t = f(x) = 2\sqrt{2x/g} - \sqrt{2(x-h)/g}$$

en la cual t es una función de x.

Para encontrar el mínimo de esta función, se halla la derivada primera:

$$\frac{dt}{dx} = f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2xg}} - \frac{1}{\sqrt{2g(x-h)}}$$

Reduciendo a común denominador:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{2g(x-h)} - \sqrt{2gx}}{\sqrt{2gx}\,\sqrt{2g(x-h)}}$$

Esta expresión debe anularse para t mínimo, lo que sucederá cuando el numerador valga cero:

Resolviendo esta ecuación de primer grado con

$$2\sqrt{2g(x-h)} - \sqrt{2gx} = 0$$

respecto a x, se obtiene:

$$x = 4/3\, h \text{ metros}$$

O sea, para que la bola alcance determinado punto en un tiempo mínimo, hay que dejarla caer de una altura que sea superior en un tercio.

Para comprobar que se trata realmente de un mínimo se puede investigar el signo de la derivada segunda o el cambio de signo de la derivada primera para $x = 4/3\, h$, aunque en el caso de problemas de esta índole en general no hay necesidad de hacerlo, pues la naturaleza del problema no deja lugar a duda en este sentido.

II — ELECTRICIDAD:

PROBLEMA:

Teniendo N pares galvánicos iguales, de resistencia interior dada, ¿Cómo se deben conectar los mismos, para que la intensidad de la corriente resultante sea máxima, suponiendo que la resistencia exterior es conocida?

S O L U C I O N :

La conexión entre los pares que forman una batería, puede ser de tres clases: 1. en derivación; 2. en serie; 3. mixta (en derivación y en serie) o sea grupos conectados entre sí en serie y formados de pares conectados en derivación o vice versa.

El problema planteado se relaciona con este último caso pues consiste en determinar, cómo se deben distribuir los pares en grupos para dar una corriente de intensidad máxima.

Según las leyes de Ohm y Kirchoff, la intensidad de la corriente, suministrada por una batería de conexión mixta, viene dada por la expresión:

$$I = \frac{n\,E}{R_e + n\,r_i / m} \qquad (1)$$

donde:

$$n\,r_i / m = R_i \qquad (2)$$

siendo I = intensidad; E = fuerza electromotriz de un par; r_i = resistencia interior de un par; R_i = resistencia interior total; R_e = resistencia exterior total; n = número de grupos conectados entre sí en serie; m = número de pares conectados en derivación que forman un grupo.

Aparentemente se tienen las dos incógnitas: **n** y **m**. Sin embargo, considerando que su producto debe ser igual a N (número total de pares), una se puede expresar en función de la otra:

$$N = n\,.\,m \qquad m = N/n$$

Sustituyendo en (1) y dividiendo numerador y denominador por n:

$$I = \frac{E}{r_e / n + r_i n / N}$$

Se debe hallar el máximo de esta función o lo que es equivalente, el mínimo de su denominador:

$$f(n) = \frac{r_e}{n} + \frac{r_i\,n}{N}, \quad \frac{df(n)}{dn} = f'(n) = -\frac{r_e}{n^2} + \frac{r_i}{N}$$

Igualando a cero:

$$-\,r_e / n^2 + r_i / N = 0 \qquad (3)$$

y resolviendo con respecto a n, se obtiene:

$$n = \sqrt{r_e N / r_i} \qquad (4)$$

o sea, este es el número de grupos que se deben conectar en serie. Por otra parte, el número de pares que tendrá cada grupo es:

$$m = \frac{N}{\sqrt{r_e N / r_i}}$$

Ejemplo numérico: ¿Cómo se deben conectar 48 pares de $r_i = 0{,}2$ ohmios cada uno, para que la intensidad de la corriente sea máxima cuando la resistencia exterior es de 2,4 ohmios?

$$n = \sqrt{48 \times 2{,}4 \;/\; 0{,}2} = 24$$

$$m = N / n = 2$$

O sea, se deben hacer grupos de a 2 en derivación y los mismos se deben conectar en serie.

Por otra parte, expresando r_e de (3), se llega a otra conclusión interesante:

$$r_e = r_i\,n^2 / N$$

dividiendo en el lado derecho numerador y denominador por n:

$$r_e = \frac{r_i\,n}{N / n}$$

y considerando que:

$$N / n = m$$

se tiene:

$$r_e = r_i\,n / m = R_i$$

puesto que $r_i\,n / m$ según (2) representa la resistencia interior total. Por lo tanto, se puede establecer que la intensidad de la corriente, suministrada por una batería es máxima cuando la resistencia exterior es igual a la resistencia interior total de la batería.

Además, haciendo un análisis de la expresión (4) se llega a las siguientes conclusiones:

1 — Si r_i es muy pequeña frente a r_e, n es muy grande y como consecuencia práctica todos los pares se deben conectar en serie.

2 — Si r_i es muy grande con respecto a r_e, n es muy pequeño, o sea $N/n = m$ muy grande y por lo tanto todos los pares se deben conectar en derivación.

III — OPTICA

P R O B L E M A :

¿Cómo debe atravesar un rayo luminoso un prisma de índice de refracción = n (dado) y de ángulo = γ (dado), para que su desviación (δ) sea mínima?

S O L U C I O N :

Un rayo luminoso cuando atraviesa un prisma (fig. 3) sufre dos refracciones consecutivas. La primera al entrar (punto A) y la segunda al salir

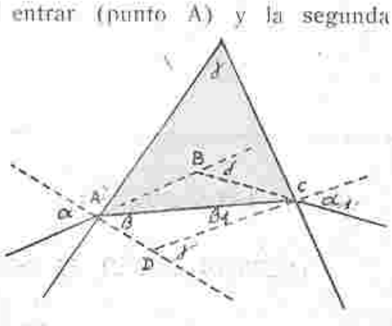

Fig. 3.

(punto C). Se entiende por desviación o ángulo de desviación del rayo el ángulo formado por las direcciones del mismo al penetrar y al abandonar el prisma. Dicha desviación se puede expresar en función de uno cualquiera de los cuatro ángulos: α, β, α_1, β_1 que son los ángulos de incidencia y de refracción, correspondientes al pasaje del rayo por el prisma y que están ligados entre sí por la ley de Snellius - Descartes y por una sencilla relación geométrica:

$$\text{sen}\ \alpha = n.\ \text{sen}\ \beta \qquad (1)$$
$$\text{sen}\ \alpha_1 = n.\ \text{sen}\ \beta_1 \qquad (2)$$

y del triángulo ADC :

$$\gamma = \beta + \beta_1 \qquad (3)$$

La tarea preliminar consiste entonces en expresar la desviación (δ) en función de uno de estos cuatro ángulos, p.ej. en función de β.

Del triángulo ABC se tiene:

$$\delta = (\alpha - \beta) + (\alpha_1 - \beta_1) = \alpha + \alpha_1 - (\beta + \beta_1)$$

o sea, según (3)

$$\delta = \alpha + \alpha_1 - \gamma \qquad (4)$$

Además, según (1) y (2) se tiene:

$$\alpha = \text{arc sen}\ (n\ \text{sen}\ \beta)$$

y

$$\alpha_1 = \text{arc sen}\ (n\ \text{sen}\ \beta_1)$$

sustituyendo en (4)

$$\delta = \text{arc sen}\ (n\ \text{sen}\ \beta) + \text{arc sen}\ (n\ \text{sen}\ \beta_1) - \gamma$$

Siendo además, según (3)

$$\beta_1 = \gamma - \beta \qquad (5)$$

se llega a la expresión:

$$\delta = f(\beta) + \text{arc sen}\,[n\ \text{sen}\,(\gamma$$
$$= \text{arc sen}\,(n\ \text{sen}\,\beta) - \beta)] - \gamma$$

en la cual δ es función exclusiva de β, ya que γ no es una variable, sino que una constante del prisma.

Para δ = mínimo, debe anularse la derivada primera de esta función:

$$\frac{d\delta}{d\beta} = f'(\beta) = \frac{n\cos\beta}{\sqrt{1 - n^2\,\text{sen}^2\,\beta}} - \frac{n\cos(\gamma-\beta)}{\sqrt{1 - n^2\,\text{sen}^2\,(\gamma-\beta)}} = 0$$

multiplicando la ecuación por

$$\sqrt{1 - n^2\,\text{sen}^2\,\beta}\ \sqrt{1 - n^2\,\text{sen}^2\,(\gamma-\beta)}$$

$$n\cos\beta\ \sqrt{1 - n^2\,\text{sen}^2\,(\gamma-\beta)}$$
$$- n\cos(\gamma-\beta)\ \sqrt{1 - n^2\,\text{sen}^2\,\beta} = 0$$

Pasando el miembro negativo al lado derecho, dividiendo con n y elevando al cuadrado, se llega a la ecuación:

$$\cos^2\beta\ [1 - n^2\,\text{sen}^2\,(\gamma-\beta)] =$$
$$\cos^2(\gamma-\beta)\ [1 - n^2\,\text{sen}^2\,\beta] \qquad (6)$$

Además, considerando que según una sencilla relación trigonométrica:

$$\text{sen}^2\,(\gamma-\beta) = 1 - \cos^2(\gamma-\beta)$$
$$\text{y} \qquad \text{sen}^2\,\beta = 1 - \cos^2\beta$$

Sustituyendo en (6) se obtiene:

$$\cos^2\beta\ [1 - n^2(1 - \cos^2(\gamma-\beta))] =$$
$$\cos^2(\gamma-\beta)\ [1 - n^2(1 - \cos^2\beta)]$$

Efectuando las multiplicaciones y las posibles simplificaciones, se llega a la ecuación:

$$\cos^2\beta\,(1 - n^2) = \cos^2(\gamma-\beta)\,(1 - n^2)$$
$$\text{o sea} \qquad \cos^2\beta = \cos^2(\gamma-\beta)$$

de donde: $\beta = \gamma/2$

Teniendo en cuenta (5) se llega al resultado final:

$$\beta = \beta_1 = \gamma/2$$

O sea, para que la desviación sea mínima, el rayo debe atravesar el prisma simétricamente.

COMPAÑEROS SOCIOS:

VUESTRO DEBER ES APORTAR NUEVOS PROBLEMAS PARA QUE LUEGO SEAN INCLUIDOS EN EL TEMARIO DE LA ASAMBLEA CONSULTIVA.